The Dynamics of Wave Fronts in Excitable Media

AUTHOR(S):

山田, 裕康; 野崎, 一洋

The Dynamics of Wave Fronts in Excitable Media

名大理　　山田裕康，野崎一洋

物理，化学あるいは生物系において，反応活性の波が伝播する現象は，様々な形で観察されている．このような波の前後で，系の状態，構造が急激な変化を示す場合があり，その境界は界面，遷移層などと呼ばれる．本報告では，この遷移層が二次元空間において形成する曲線パターンのダイナミクスを論じ，さらに，螺旋波の形成について考える．

活性化因子 u および抑制因子 v の二成分からなる反応拡散系をモデルにとり，励起状態からの v による回復が起こっていない領域 (non-recovering region, $v = v_S$:const.) の遷移層 (wave front) の伝播を調べる．すなわち，v_S をパラメータとする一成分反応拡散系

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u; v_S), \quad f(u; v_S) = f(u, v = v_S) \tag{1}$$

を扱う．ここで Δ はラプラシアン，$f(u, v) = 0$ は (u, v)-空間で N 字型の曲線を表わす．方程式 (1) の一次元的な解 $u = u(x - ct)$ すなわち遷移層が直線状に配置した解を仮定し，この解から二次元の媒質を伝播する遷移層を構成する．[1)-3)] 遷移層の描く曲線の曲率が小さい（曲率半径が遷移層の幅より大きい）として漸近的な摂動法を用いる．この際得られる可解条件と，曲線が連続であるという幾何学的な条件より，遷移層曲線パターンのダイナミクスが次の方程式に支配されていることを導いた．

$$\begin{aligned} &\tilde{\alpha}_{\tau\eta} = (\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}_{\eta} + \tilde{\alpha}_{\eta\eta})_{\eta}, \quad \tilde{\alpha}_{\eta} = c\tilde{\kappa}, \\ &\alpha(s, t) = \varepsilon^{1/2}\tilde{\alpha}(\eta, \tau), \quad \kappa(s, t) = \varepsilon\tilde{\kappa}(\eta, \tau), \\ &\eta = \varepsilon^{1/2}s, \quad \tau = \varepsilon t, \end{aligned} \tag{2}$$

ここに $\alpha(s, t), \kappa(s, t)$ は曲線上の点 s における接線速度および曲率，s は曲線の弧長，ε は摂動パラメータ．方程式 (2) は Burgers 方程式を空間微分したものに対応しており，時間の任意関数を含む変数変換を使って Burgers 方程式に帰着できる．

Burgers 方程式 (2) の厳密解が求まれば，系 (1) の漸近的なあるいは主要な振舞いを調べることができる．そこで，微分方程式系に対する群対称性の理論を応用し，Burgers 方程式のいくつかの特解を解析的な形で得た．[4] これらの特解は遷移層が成す曲線パターンの分類を与え，時間とともに拡がる円環，回転する螺旋などを含んでいる．[5]

さらに螺旋波の形成（螺旋解の安定性）を考えてみる．方程式 (2) は Cole-Hopf 変換 $\tilde{\alpha} = 2w_\eta / w$によって，

$$w_\tau = w_{\eta\eta} + (A(\tau) - B(\tau)\eta)w \tag{3}$$

となる．ここで $A(\tau), B(\tau)$ は任意函数．$A = 0, B = 1$ のとき，

$$\begin{aligned} &w(\eta, 0) = w(\eta) \to 0 \quad (\eta \to 0), \\ &w_\eta(0, \tau) = 0, \quad w(\eta, \tau) \text{ は } \eta, \tau \in [0, +\infty) \text{ で有界}, \end{aligned} \tag{4}$$

という初期値-境界値の条件のもとで方程式 (3) を解くと，

$$\begin{aligned} w(\eta, \tau) &= \sum_{Ai'(\lambda_j) = 0} a(\lambda_j) Ai(\eta + \lambda_j) \exp(\lambda_j \tau) \\ (\tau \to +\infty) \quad &\sim Ai(\eta + \lambda) \exp(\lambda \tau), \quad \lambda = \max_j \lambda_j. \end{aligned} \tag{5}$$

ここに $Ai(\eta)$ は（有界な）Airy 函数であり，(5) は $\tau \to +\infty$ で螺旋波に漸近する解になっている．ゆえに，初期値-境界値問題は，螺旋解に漸近する初期条件の領域が存在することを示唆している．

参考文献

1) J. J. Tyson and J. P. Keener, Physica **D32** (1988), 327.

2) J. J. Tyson and J. P. Keener, Physica **21D** (1986), 307.

3) J. P. Keener, SIAM J.Appl.Math. **46** (1986), 1039.

4) P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Springer-Verlag, 1986), p. 212.

5) H. Yamada and K. Nozaki, talk at the 46th Annual Meeting of the Physical Society of Japan, Tokyo, March 1991.